

DELJIVOST BROJEVA

Primer 1.

1. Odredi najmanji četvorocifren broj deljiv sa 18.

Rešenje:

Nemamo direktni kriterijum deljivosti sa 18. Razmislimo malo.... Broj 18 možemo napisati kao $18 = 2 \cdot 9$

Broj je deljiv sa 18 ako je deljiv sa 2 i sa 9.

U tekstu zadatka nije naglašeno da cifre moraju biti različite, što znači da se cifre mogu ponavljati.

Traži se najmanji četvorocifreni broj, pa ćemo sa razmišljanjem krenuti od: $100\Box$.

Sad u kvadratič trebamo upisati neki od brojeva 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9 ali tako da taj broj bude deljiv i sa 2 i sa 9.

Znamo da je broj deljiv sa 2 ako se završava sa 0,2,4,6,8. To su moguće opcije.

Broj je deljiv sa 9 ako mu je zbir cifara deljiv sa 9.

U našem broju $100\Box$ je zbir za sada $1+0+0=1$. Očigledno treba dodati 8 da bi bilo $1+0+0+8=9$.

Dakle, traženi broj je 1008.

Radi provere, kad podelimo $1008:18 = 56$.

Primer 2.

Odrediti najveći petocifreni broj kome su cifre različite a da je deljiv sa 6.

Rešenje:

Kako je $6 = 2 \cdot 3$ zaključujemo da je **broj deljiv sa 6 ako je deljiv sa 2 i sa 3**.

Kako se traži **najveći** petocifreni broj a cifre da su različite, zgodno je krenuti od $9876\Box$.

U kvadratič treba staviti neki od brojeva 5,4,3,2,1,0. (jer cifre moraju da se razlikuju)

Deljivost sa dva nam kaže da to mogu biti 4,2,0.

Znamo da je broj deljiv sa 3 ako mu je zbir cifara deljiv sa 3.

U našem broju $9876\Box$ za sada imamo $9+8+7+6=30$ a to je deljivo sa 3, pa ćemo dodati 0.

Traženi broj je dakle: 98760.

Kad proverimo, zaista $98760:6 = 16460$.

Primer 3.

Odrediti najmanji trocifren broj deljiv sa 12.

Rešenje:

Kako je $12 = 3 \cdot 4$ to zaključujemo da je **broj deljiv sa 12 ako je deljiv sa 3 i sa 4**.

Kako se traži najmanji broj , krenućemo sa $10\boxed{}$, gde umesto kvadratića možemo upisati 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9.

Broj je deljiv sa 4 ako mu je dvocifreni završetak deljiv sa 4.

Ovo nam smanjuje opcije na 0,4,8.

Da bi bio deljiv sa 3 zbir cifara mora da je deljiv sa 3. kako je $1+0+8=9$ zaključujemo da je traženi broj 108.

Zaista $108:12 = 9$

Primer 4.

Odrediti najmanji prirodan broj koji podeljen sa 6 ili 8 ili 10 daje ostatak 1.

Rešenje:

Ideja je da najpre nadjemo sadržalac za brojeve 6,8 i 10 pa da na taj broj dodamo 1.

6, 8, 10	2
3, 4, 5	2
3, 2, 5	2
3, 1, 5	3
1, 5	5
1	

$$S(6,8,10) = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 = 120$$

Traženi broj je $120 + 1 = \boxed{121}$

Primer 5.

Zbir tri uzastopna cela broja je uvek deljiv sa 3. Dokazati.

Rešenje:

Uzastopne brojeve uopšteno zapisujemo kao: $n-2$, $n-1$, n , $n+1$, $n+2$,.....

Zbir tri uzastopna broja je:

$$n + (n+1) + (n+2) = n + n + 1 + n + 2 = 3n + 3 = \boxed{3 \cdot (n+1)}$$

Ovo je očigledno deljivo sa 3 jer je neki proizvod deljiv sa 3 ako je bar jedan činilac deljiv sa 3.

Primer 6.

Dokazati da je razlika kvadrata dva uzastopna neparna broja deljiva sa 8.

Rešenje:

Najpre da se podsetimo kako uopšteno obeležavamo parne i neparne brojeve.

$2n$ je paran broj

$2n+1$ ili $2n-1$ je neparan broj

Uzastopni parni brojevi bi bili : $2n-4$, $2n-2$, $2n$, $2n+2$, $2n+4$,

Uzastopni neparni brojevi bi bili : $2n-3$, $2n-1$, $2n+1$, $2n+3$,

Da postavimo sada zadatak:

Razlika kvadrata dva uzastopna neparna broja :

$$(2n+1)^2 - (2n-1)^2 =$$

Sad po formuli za kvadrat binoma imamo:

$$(2n+1)^2 - (2n-1)^2 =$$

$$(4n^2 + 4n + 1) - (4n^2 - 4n + 1) =$$

$$\cancel{4n^2} + \cancel{4n} + 1 - \cancel{4n^2} + \cancel{4n} - 1 = \boxed{8n}$$

Napravili smo proizvod čiji je jedan činilac 8 pa je on deljiv sa 8.

Primer 7.

Ako je zbir cifara dvocifrenog broja jednocifren broj, da bi se pomnožio sa 11, dovoljno je izmedju njegovih cifara umetnuti zbir njegovih cifara. Dokazati.

Rešenje:

Da najpre objasnimo šta ovo znači pa ćemo posle to i dokazati.

Na primer , treba da pomnožimo $32 \cdot 11$.

Šta uradimo?

Pošto je zbir cifara broja 32 manji od deset, koristimo ovo trikče:

Raširimo 3 i 2 a u sredinu stavimo $3+2=5$ tj. $3\square 2 \rightarrow 352$

Koliko je recimo $54 \cdot 11$? Koristeći trikče, raširimo 5 i 4 a izmedju stavimo 9 , $5\square 4 \rightarrow 594$

Sad da odradimo dokaz:

Uzmimo uopšteno dvocifren broj \overline{ab} . Taj dvocifren broj možemo zapisati kao: $\overline{ab} = a \cdot 10 + b$, naravno uz uslov da je zbir cifara manji od 10 , to jest $a+b < 10$

$$(a \cdot 10 + b) \cdot 11 = \text{sad je štos da } 11 \text{ napišemo kao } 11 = 10 + 1$$

$$\begin{aligned}(a \cdot 10 + b) \cdot (10 + 1) &= \\ 100a + \underset{\substack{10a + 10b \\ \text{Odavde izvučemo } 10}}{+} b &= \\ 100a + 10(a + b) + b\end{aligned}$$

Ovim smo dokazali traženu stvar.

Primer 8.

Dokazati da su periodični decimalni brojevi :

- a) 0,777777.....
- b) 0,323232.....
- c) 2,625625625.....

Racionalni brojevi.

Rešenje:

- a) 0,7777777.....

Obeležimo dati broj sa x.

Dakle $x = 0,7777....$

Kad se jedna cifra ponavlja, sve pomnožimo sa 10.

$$x = 0,7777\dots \cdot *10$$

$$10x = 7,7777\dots$$

$$10x = 7 + 0,7777\dots$$

Ovo je x

$$10x = 7 + x$$

$$10x - x = 7$$

$$9x = 7$$

$$\boxed{x = \frac{7}{9}}$$

b) 0,323232.....

Sličan postupak, obeležimo ovaj broj sa x a zatim množimo sa 100, zato što se dve cifre ponavljaju.

$$x = 0,323232\dots \cdot *100$$

$$100x = 32,3232\dots$$

$$100x = 32 + 0,323232\dots$$

Ovo je x

$$100x = 32 + x$$

$$100x - x = 32$$

$$99x = 32$$

$$\boxed{x = \frac{32}{99}}$$

c) 2,625625625.....

Prvo odvojimo 2 cela nek sačekaju : $2,625625625\dots = 2 + 0,625625\dots$

$$x = 0,625625\dots \cdot *1000$$

$$1000x = 625,625625\dots$$

$$1000x = 625 + 0,625625\dots$$

Ovo je x

$$1000x = 625 + x$$

$$1000x - x = 625$$

$$999x = 625$$

$$\boxed{x = \frac{625}{999}}$$

Sad se vratimo da završimo zadatak:

$$2,625625625\dots = 2 + 0,625625\dots = 2 + \frac{625}{999} = \boxed{2 \frac{625}{999}}$$

Ako profesor ne traži ceo postupak za pretvaranje možete se snaći i ovako:

Ako imamo da se samo 1 broj ponavlja, u brojiocu ide taj broj a u imeniocu 9

$$0,777\dots = \frac{7}{9}$$

$$0,444\dots = \frac{4}{9}$$

$$0,222\dots = \frac{2}{9}$$

Ako imamo da se 2 broja ponavljaju, u brojiocu su ta dva broja a u imeniocu 99

$$0,3232\dots = \frac{32}{99}$$

$$0,1515\dots = \frac{15}{99}$$

$$0,878787\dots = \frac{87}{99}$$

Ako se 3 broja ponavljaju u imeniocu je 999 itd.

$$0,132132\dots = \frac{132}{999}$$

$$0,915915\dots = \frac{915}{999}$$

$$0,807807\dots = \frac{807}{999}$$